

UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et Discrètes

Par: MERZOUGUI Leila

Sujet:

**L'équation de convection-diffusion dans un domaine
borné**

Diriger et encadré par :

Pr : BENHAMIDOUCHE Nourdine

Promotion: 2012/2013

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, J'exprime ma gratitude et mes remerciements à mon directeur de mémoire Mr Benhamidouche Nourdine, son précieux conseil et son aide durant toute la période du travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction	2
1 Equation de convection-diffusion	3
1.1 Quelques définitions	3
1.1.1 Définition (convection et diffusion)	3
1.1.2 Définition de l'équation de convection-diffusion	4
1.1.3 Problème de convection-diffusion à domaine bornée	4
1.2 Méthode de résolution	6
1.2.1 Principe de la méthode de séparation des variables	6
1.2.2 La méthode de séparation des variables pour un problème homogène	8
1.2.3 La méthode de séparation des variables en présence d'un terme source	10
1.2.4 La méthode de séparation des variables avec des conditions aux limites non homogènes	12
2 Equation de convection-diffusion pour concentration de sortie expérimentale	15
2.1 Présentation du problème de convection-diffusion	15
2.2 Formulation et transformation	16
2.3 Théorème de Sturm Liouville	19

2.4	Extension des fonctions propres	20
3	Equation de convection-diffusion pour concentration de sortie avec données mathématiques	24
3.1	La concentration de sortie	24
3.2	Une estimation de l'erreur de Danckwarts	27
	Conclusion	1

Introduction

Des solutions classiques de l'équation de diffusion ont été cataloguées pour la plupart des problèmes importants de transfert de chaleur, l'équation de diffusion a été largement utilisée comme un model pour les processus de réaction chimique.

La description des procédés chimiques et de transport des contaminants ont motivé un grand volume de travail sur l'équation de convection-diffusion unidimensionnelle.

Des méthodes numériques ont fourni des solutions à des problèmes satisfaisant à un rang assez large de conditions. Cependant, les solutions analytiques continuent d'être très appréciées pour leurs simplicités inhérentes, leur capacité à transmettre des informations qualitatives sur le problème physique, et une vérification de modèles numériques.

Notre travail se base sur l'article de W.J.GOLZ et J.R.DORROH, qui consiste à chercher des solutions pour un problème de convection-diffusion à domaine borné.

Ce sujet comprend trois (03) parties:

La première partie du sujet présente les différentes formes du problème de convection-diffusion, et le principe de la méthode de séparation des variables avec les différentes solutions de l'équation de la chaleur pour plusieurs types de problèmes (homogènes, non homogènes).

La deuxième partie, sera consacrée à la présentation du problème et les différents étapes pour sa résolution, en une concentration de sortie expérimentale, il s'agit d'un problème aux limites avec des conditions de Robin, pour l'équation de convection-diffusion avec la donnée d'une valeur de concentration de sortie expérimentale.

Le dernier chapitre est consacré à la résolution du problème en définissant la concentration de sortie comme une solution de l'équation de diffusion similaire avec une estimation de l'erreur de correction, le cas où la valeur de concentration est donnée comme solution d'une équation différentielle ordinaire.

Chapitre 1

Equation de convection-diffusion

1.1 Quelques définitions

Pour mieux comprendre le problème posé, il s'avère nécessaire de définir certains termes.

1.1.1 Definition (convection et diffusion)

a) Convection:

La convection est un mode de transfert de chaleur où celle-ci est transporté par au moins un fluide(liquide ou gaz), d'une zone chaude à une autre moins chaude. Les molécules du fluide s'échauffent, se dilatent, s'allègent et s'élèvent.

De nouvelles molécules plus froides remplacent continuellement les molécules assendantes chaudes, cela entraine une agitation permanente du fluide contre la paroi [6]

Il est noté que le transfert de la chaleur se fait par un DEPLACEMENT d'une zone à une autre.

A titre d'exemple, durant la cuisson de pâtes, l'eau se met en mouvement spontanément, les groupes de particules du fluide proche du fond

de la casserole sont chauffés, se dilatent donc deviennent moins denses et montent, ceux de la surface sont refroidis par le contact de la surface avec un milieu moins chaud, se contractent donc gagnent en densité et plongent.

b) Diffusion:

La diffusion est un mode de transfert de la chaleur provoqué par une différence de température au sein d'un même matériaux solides ou entre deux matériaux en contact. L'agitation des atomes se transmette de proche en proche. Donc par diffusion(propagation) de proche en proche et non pas par un déplacement [6]

A titre d'exemple: si vous posez une main sur un objet chaud, celui-ci vous transmet la chaleur par diffusion, donc c'est parcequ'il y a transfert de chaleur de l'objet vers la main qu'on dit que l'objet est chaud.

1.1.2 Définition de l'équation de convection-diffusion

L'équation de convection-diffusion est une combinaison des équations de la diffusion et de convection(advection), qui décrit des phénomènes physiques où les particules, l'énergie, ou d'autre quantités physiques sont transférés à l'interieur d'un système physique en raison de deux processus qui sont: la convection et la diffusion.

Par consequent, l'équation de convection-diffusion c'est l'équation qui régit de nombreux procedés de transport de phénomènes d'un batiment.

1.1.3 Problème de convection-diffusion à domaine bornée

Dans notre mémoire, nous allons étudier le problème de diffusion à domaine borné, pour cela nous allons donner les différentes formes de ce type de problèmes.

1) Problème aux limites de convection-diffusion avec conditions de Dirichlet

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - v \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - \mu u(x, t) & 0 < x < l & \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, t_0) &= f(x) & t > t_0 \\ u(0, t) = u(l, t) &= 0 & 0 < x < l\end{aligned}$$

Avec $f(x)$ donnée, et les constantes D, v et μ décrivent respectivement

la diffusion, la vitesse du fluide longitudinal et la décadence.

2) Problème aux limites de convection-diffusion avec conditions de Neuman

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - v \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - \mu u(x, t) & 0 < x < l & \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, t_0) &= f(x) & t > t_0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) &= 0 & 0 < x < l\end{aligned}$$

Avec $f(x)$ donnée, et les constantes D, v et μ décrivent respectivement

la diffusion, la vitesse du fluide longitudinal et la décadence.

3) Problème aux limites de convection-diffusion avec conditions mixtes

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - v \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - \mu u(x, t) & 0 < x < l & \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, t_0) &= f(x) & t > t_0 \\ u(0, t) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) &= 0 & 0 < x < l\end{aligned}$$

Avec $f(x)$ donnée, et les constantes D, v et μ décrivent respectivement

la diffusion, la vitesse du fluide longitudinal et la décadence.

4) *Problème aux limites de convection-diffusion avec conditions de Robin*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - v \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - \mu u(x, t) & 0 < x < l & \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x, t_0) &= f(x) & t > t_0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + h_1 u(0, t) &= 0 & h_1, h_2 > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) + h_2 u(l, t) &= 0 \end{aligned}$$

Avec $f(x)$ donnée, et les constantes D, v et μ décrivent respectivement

la diffusion, la vitesse du fluide longitudinal et la décadence.

Ce dernier problème est constitué d'une combinaison des deux conditions,

Dirichlet et de Neuman et sera l'objet de notre travail dans le chapitre deux.

1.2 Méthode de résolution

On va maintenant présenter la méthode de séparation des variables qu'on va utiliser pour traiter notre problème.

1.2.1 Principe de la méthode de séparation des variables

La méthode de séparation des variables consiste à poser : $u(x, t) = \psi(t) \cdot \varphi(x)$

dans l'équation, et de "séparer les variables" [15]

L'équation devient: $\psi'(t) \cdot \varphi(x) = K \psi(t) \cdot \varphi''(x)$

On divise alors formellement par: $u(x, t) = \psi(t) \cdot \varphi(x)$

On trouve: $\frac{1}{K} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$

On obtient deux équations à variables séparées:

$$\psi'(t) = \lambda K \psi(t)$$

$$\varphi''(x) = \lambda \varphi(x)$$

On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ avec les conditions aux limites.

soit:

$$\varphi''(x) = \lambda \varphi(x)$$

$$\varphi(0) = \varphi(L) = 0$$

Les solutions dépendent de la constante λ :

Il n'y a pas de solutions non nulles dans les cas où $\lambda > 0$ et $\lambda = 0$

Si $\lambda < 0$ alors :

$$\varphi(x) = A \sin(\sqrt{-\lambda}x) + B \cos(\sqrt{-\lambda}x)$$

$$\varphi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\varphi(L) = 0 \Rightarrow A \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0$$

Où bien $A = 0$ ou bien $\sqrt{-\lambda}L = n\pi$ $n > 0$ entier

Alors $\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ $n > 0$

Tel que : $\lambda_n = \frac{-n^2\pi^2}{L^2}$

On appelle les solutions $\varphi_n(x)$ les fonctions propres du problème et les λ_n les valeurs propres associées.

On résout l'équation $\psi'_n(t) = \lambda_n K \psi_n(t)$ pour les valeurs de λ_n trouvées précédemment, on trouve:

$$\psi_n(t) = C_n e^{K\lambda_n t} = C_n e^{-K \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

On écrit donc la solution $u(x, t)$ comme somme de toutes les solutions élémentaires :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-K \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

Telque:

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

1.2.2 La méthode de séparation des variables pour un problème homogène

On présente les différentes solutions de l'équation de la chaleur pour plusieurs types de problème.

Exemple :

1) Problème de Dirichlet pour l'équation de la chaleur:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= 0 & t \geq 0 & \quad x \in [0, L] \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned}$$

Si on cherche la solution sous la forme $u(x, t) = \psi(t) \cdot \varphi(x)$ le problème devient

à valeurs propres et la solution est donnée par:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

avec

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

2) Problème de Neuman pour l'équation de la chaleur:

Soit à trouver une solution générale à l'équation de la chaleur lorsque les conditions aux limites sont:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= 0 & t \geq 0 & & x \in [0, L] \\ u(x, 0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) \end{aligned}$$

Alors la solution est donnée par:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

3) Problème mixte pour l'équation de la chaleur:

Le problème est donné sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= 0 & t \geq 0 & & x \in [0, L] \\ u(x, 0) &= f(x) \\ u(0, t) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

Il nous faut appliquer de nouveau le principe de la méthode de séparation

des variables, on trouve la solution sous la forme suivante:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi c}{2L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)$$

4) *Problème de Robin pour l'équation de la chaleur:*

La solution générale de cette équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= 0 & t \geq 0 & & x \in [0, L] \\ u(x, 0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - u(0, t) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) + u(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

est donnée par:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 t}$$

1.2.3 La méthode de séparation des variables en présence d'un terme source

Les premières étapes se font en oubliant le terme source (i.e .sur l'équation homogène).

On trouve la suite de valeurs propres λ_n associées aux fonctions propres $\varphi_n(x)$

qui sont orthogonalisées par le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^L f(x)g(x)dx$.

La nouvelle étape est de faire le produit scalaire de l'équation avec le terme source par une fonction propre $\varphi_n(x)$ en considérant que la solution $u(x, t)$ s'écrit comme suit:

$$u(x, t) = \varphi_n(x)\psi_n(t)$$

Exemple [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= t \sin(\pi x) && \text{pour } 0 < x < 1 && t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0 \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0 \end{aligned}$$

On fait les premières étapes de la méthode de séparation des variables en oubliant le terme source $h(x, t) = t \sin(\pi x)$ (i.e. sur l'équation homogène), on trouve la suite des valeurs propres $\lambda_n = -n^2\pi^2$ associées aux fonctions propres: $\varphi_n(x) = \sin(n\pi x)$.

Maintenant, on fait le produit scalaire de l'équation avec le terme source par une fonction propre $\varphi_n(x)$ en considérant que la solution $u(x, t)$ s'écrit comme suit:

$$u(x, t) = \varphi_n(x)\psi_n(t)$$

On arrive à:

$$\psi_n''(t) \langle \varphi_n(x), \varphi_n(x) \rangle - \psi_n(t) \langle \varphi_n''(x), \varphi_n(x) \rangle = \langle h(x, t), \varphi_n(x) \rangle$$

Et donc:

$$\psi_n''(t) - \lambda_n \psi_n(t) = \frac{\langle h(x, t), \varphi_n(x) \rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x) \rangle}$$

On arrive en fait à la résolution de la même équation que dans le cas sans terme source mais avec un second membre qui vaut:

$$h_n(t) = \frac{\langle h(x, t), \varphi_n(x) \rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x) \rangle}$$

Dans l'exemple, on obtient:

$$h_1(t) = t \quad \text{et} \quad h_n(t) = 0$$

– Pour $n = 1$, on a donc à résoudre:

$$\psi_1''(t) + \pi^2 \psi_1(t) = t$$

Les solutions sont:

$$\psi_1(t) = C_1 \sin(\pi t) + d_1 \cos(\pi t) + \frac{t}{\pi^2}$$

– Pour $n > 2$ on a à résoudre:

$$\psi_n''(t) + n^2 \pi^2 \psi_n(t) = 0$$

Les solutions sont:

$$\psi_n(t) = C_1 \sin(n\pi t) + d_1 \cos(n\pi t)$$

Le reste se déroule comme dans le cas sans terme source

1.2.4 La méthode de séparation des variables avec des conditions aux limites non homogènes

On va appliquer maintenant la méthode de séparation des variables à un problème avec des conditions aux limites non homogènes.

Cette méthode consiste à relever les conditions aux limites non homogènes.

Pour cela on cherche une fonction a priori quelconque vérifiant les conditions aux limites non homogènes de problème.

Dans la pratique, il faut essayer de choisir la fonction la plus simple possible.

Puis on fait un changement d'inconnue $\tilde{u}(x, t)$ de telle manière il vérifie les conditions aux limites homogènes.[1]

Exemple [1]

Soit le problème avec les conditions aux limites non homogènes suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= 0 & \text{pour} & \quad 0 < x < 1 & \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0 \\ u(0, t) &= f(t) \\ u(1, t) &= g(t) \end{aligned}$$

On peut prendre:

$$\theta(x, t) = (1 - x)f(t) + xg(t)$$

On remarque que $\theta(x, t)$ vérifie les conditions aux limites de problème posé :

$$\theta(0, t) = f(t) \quad \text{et} \quad \theta(1, t) = g(t)$$

Ensuite, on fait un changement d'inconnue :

$$\tilde{u}(x, t) = u(x, t) - \theta(x, t)$$

On voit que $\tilde{u}(x, t)$ vérifie des conditions aux limites homogènes:

$$\tilde{u}(0, t) = u(0, t) - \theta(0, t) = 0$$

$$\tilde{u}(1, t) = u(1, t) - \theta(1, t) = 0$$

Le problème en $\tilde{u}(x, t)$ s'écrit sous la forme suivante:

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial^2 \theta^2}{\partial t^2}(x, t) \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1 \quad t > 0$$

$$\tilde{u}(x, 0) = -\theta(x, 0)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, 0) = -\frac{\partial \theta}{\partial t}(x, 0)$$

$$\tilde{u}(0, t) = 0$$

$$\tilde{u}(1, t) = 0$$

On a obtenu un problème avec des conditions aux limites homogènes.

Chapitre 2

Equation de convection-diffusion pour concentration de sortie experimentale

2.1 Présentation du problème de convection-diffusion

Notre problème est de formuler dans un domaine borné où la loi de conservation appropriée donne des conditions de Robin aux extrémités.

Le problème considéré prend la forme suivante [5]

$$RC_t = DC_{xx} - vC_x - \mu C + \gamma \quad 0 < x < l \quad t \in R \quad (2.1)$$

Où $C = C(x, t)$ représente une concentration, avec x la distance longitudinale et le temps t .

Les constantes R, D, v, μ et γ décrivent respectivement la sorption linéaire, la diffusion, la vitesse du fluide longitudinal, la décadence et la production.

Cette équation satisfait les conditions suivantes :

$$C(x, t_0) = \phi(x) \quad 0 < x < l \quad (2.2)$$

$$vC(0, t) - DC_x(0, t) = vg(t) \quad t > t_0 \quad (2.3)$$

$$vC(l, t) - DC_x(l, t) = vC_E \quad t > t_0 \quad (2.4)$$

Où $\phi(x)$, $g(t)$ sont des fonctions bornées continuellement dérivables et C_E est la concentration de sortie, qui pour l'instant, nous la considérons comme une quantité expérimentalement mesurée .

2.2 Formulation et transformation

Pour transformer l'équation de convection-diffusion sous une forme standard pour une équation de diffusion non homogène, et pour fournir des conditions aux limites homogènes, on introduit un changement de variable [5]

$$C(x, t; r, s) = (W(x, t) + e^{st}H(x, t))e^{rx-st} \quad (2.5)$$

Si on choisit les paramètres comme :

$$r = \frac{v}{2D}, \quad s = \frac{1}{R}\left(\frac{v^2}{4D} + \mu\right), \quad D, R \neq 0 \quad (2.6)$$

Alors on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= (W_t(x, t) - sW(x, t))e^{rx-st} + e^{rx}H_t(x, t) \\ \frac{\partial C}{\partial x} &= e^{rx-st}(W_x(x, t) + rW(x, t)) + e^{rx}(H_x(x, t) + rH(x, t)) \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= e^{rx-st}(W_{xx}(x, t) + 2rW_x(x, t) + r^2W(x, t)) + e^{rx}(H_{xx}(x, t) + 2rH_x(x, t) + \\ &\quad r^2H(x, t)) \end{aligned}$$

En remplaçant dans notre problème (2.1) , on obtient :

$$R[e^{rx-st}(W_t(x,t) - sW(x,t)) + e^{rx}H_t(x,t)] = D[e^{rx-st}(W_{xx}(x,t) + 2rW_x(x,t) + r^2W(x,t))] + D[e^{rx}(H_{xx}(x,t) + 2rH_x(x,t) + r^2H(x,t))] - v[e^{rx-st}(W_x(x,t) + rW(x,t) + e^{rx}(H_x(x,t) + rH(x,t))] - \mu[e^{rx-st}(W(x,t) + e^{st}H(x,t))] + \gamma$$

On divise par R et on multiplie par e^{-rx+st} on trouve:

$$W_t(x,t) = \frac{D}{R}W_{xx}(x,t) + e^{st}F(x,t) \quad (2.7)$$

Telque :

$$F(x,t) = \frac{\gamma}{R}e^{-rx} - (sH(x,t) + H_t(x,t)) + \frac{D}{R}H_{xx}(x,t)$$

Et la condition initiale (2.2) devient :

$$C(x,t_0) = (W(x,t_0) + e^{st_0}H(x,t_0))e^{rx-st_0}$$

Ce qui implique:

$$e^{-rx}\phi(x) = (W(x,t_0) + e^{st_0}H(x,t_0))e^{-st_0}$$

Donc

$$W(x,t_0) = e^{st_0}(e^{-rx}\phi(x) - H(x,t_0)) \quad (2.8)$$

Et si on définit :

$$H(x,t) = (1 + \cos \frac{\pi x}{l})g(t) + (1 - \cos \frac{\pi x}{l})e^{-lx}C_E \quad (2.9)$$

On trouve que:

$$H_x(x,t) = (\frac{-\pi}{l} \sin \frac{\pi x}{l})g(t) + (\frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi x}{l})e^{-lx}C_E - lC_E e^{-lx}(1 - \cos \frac{\pi x}{l})$$

Alors la condition aux limites (2.3) devient :

$$vC(0, t) - DC_x(0, t) = vg(t) \quad t > t_0$$

Ce qui implique:

$$v(W(0, t) + e^{st}H(0, t))e^{-st} - D[e^{-st}(W_x(0, t) + rW(0, t))] - D(H_x(0, t) + rH(0, t)) = vg(t)$$

$$\text{On a :} \quad H(0, t) = 2g(t) \quad \text{et} \quad H_x(0, t) = 0$$

Par substitution on aura :

$$\frac{v}{2}e^{-st}W(0, t) - De^{-st}W_x(0, t) - DH_x(0, t) = 0$$

divisant par $-D$ on obtient :

$$W_x(0, t) - rW(0, t) = 0 \quad (2.10)$$

Et la condition au limite (2.4) devient :

$$W_x(l, t) - rW(l, t) = 0 \quad (2.11)$$

2.3 Théorème de Sturm Liouville

Soit A un opérateur linéaire différentiel symétrique sur un sous-espace

vectoriel H de $L^2_\sigma([a, b], \mathbb{R})$ de la forme:

$$\forall x \in [a, b], Af(x) = a(x)f''(x) + b(x)f'(x) + c(x)f(x) \quad \text{Ou } a \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*}).$$

On suppose que H est d'une des formes suivantes:

$$H = \{f \in C^2([a, b], \mathbb{R}) / \alpha_1 f(a) + \beta_1 f'(a) = 0 \text{ et } \alpha_2 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0\}$$

Qui peut s'écrire aussi :

$$H = \{f \in C^2(]a, b[, \mathbb{R}) / f \text{ est borné sur }]a, b[\}$$

Où $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sont des réels fixés. Alors, l'opérateur A admet une infinité de valeurs propres et l'ensemble des valeurs propres est dénombrable et noté

$(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telque:

- $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n$ est réelle et simple.

$$-|\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3| < \dots < |\lambda_n| \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |\lambda_n| = +\infty$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un vecteur propre associé à λ_n . Alors $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$

est un système orthogonal total de H et $(\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|})_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne

de H faite de vecteurs propres pour A . [15]

2.4 Extension des fonctions propres

Pour obtenir notre représentation, on exige une séparation de variable de la

solution : $W(x, t) = \varphi(x).T(t)$, en mettant $F(x, t) = 0$ [5]

On a : $W_t(x, t) = \frac{D}{R}W_{xx}(x, t)$ (*)

D'autre part on a:

$$W_t(x, t) = \varphi(x).T'(t) \quad \text{et} \quad W_{xx}(x, t) = \varphi''(x).T(t)$$

En substitution dans (*) on trouve :

$$\varphi(x).T'(t) = \frac{D}{R}\varphi''(x).T(t) = \lambda$$

$$\frac{D}{R} \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \varphi''(x) - \frac{R}{D} \lambda \varphi(x) = 0$$

Soit $\lambda < 0 \quad \Rightarrow \lambda = -k^2$

Donc $\varphi(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \sin(\sqrt{\lambda}x)$

On applique la condition aux limites (2.10) :

- $W_x(0, t) - rW(0, t) = 0$ (2.10)

On sait que $W_x(x, t) = \varphi'(x).T(t)$

Et $\varphi'(x) = -ak \sin(kx) + bk \cos(kx)$

Alors $W_x(0, t) = bk.T(t)$ **et** $W(0, t) = a.T(t)$

Alors (2.10) devient :

$$bk.T(t) - ra.T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{ra}{b}$$

Maintenant on applique la condition aux limites (2.11) :

$$\bullet \quad W_x(l, t) - rW(l, t) = 0 \quad (2.11)$$

Alors on trouve:

$$\varphi'(l).T(t) - r\varphi(l).T(t) = 0$$

Ce qui donne

$$\sin(kl)(-ak - rb) + \cos(kl)(bk - ra) = 0$$

$$\textbf{Et comme} \quad bk - ra = b\frac{ra}{b} - ra = 0$$

$$\textbf{Alors} \quad \sin(kl)(ak + rb) = 0$$

$$\textbf{Donc} \quad k = \frac{n\pi}{l} \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

Ce qui nous conduit à un problème de Sturm- Liouville régulier avec la suite des valeurs propres : $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ et la suite des fonctions propres:

$$\varphi_n(x) = \cos(x\sqrt{\lambda}) + \frac{r}{\sqrt{\lambda}} \sin(x\sqrt{\lambda}) \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.1)$$

Les fonctions propres normalisées d'un système de Sturm liouville composent clairement une base orthonormée.[9]

D'où il résulte que (2.7) admet une solution de la forme suivante :

$$W(x, t) = \sum \varphi_n(x).T_n(t) \quad M = 0 \quad (3.3)$$

Telque :

$$T_n(t) = \frac{e^{-\frac{D}{R}\lambda_n t}}{\int \varphi_n^2(x) dx} \left(\int_{t_0}^t e^{(s+\frac{D}{R}\lambda_n)\tau} \int_0^l F(x, \tau) \cdot \varphi_n(x) dx \cdot d\tau + e^{(s+\frac{D}{R}\lambda_n)t_0} \int_0^l e^{-rx} \phi(x) - \right. \\ \left. H(x, t_0) \varphi_n(x) dx \right) \quad (3.4)$$

Pour obtenir (3.4), on a utilisé l'orthogonalité des fonctions propres et la symétrie des conditions aux bords sur $W(x, t)$ et $\varphi(x)$ qui sont nécessaires pour développer l'équation de convection-diffusion en $T(t)$ qui satisfait la condition initiale de $W(x, t)$. [12]

Maintenant, nous voulons démontrer que la représentation de $C(x, t)$ sera bornée pour tout le temps t , et pour l'établir :

On fixe t dans (3.4), en supposant que le second terme est borné, et donc

disparaître lorsque $t_0 \rightarrow -\infty$ et on substitut $W(x, t) = \sum \varphi_n(x).T_n(t)$

dans (2.5) $\Leftrightarrow C(x, t) = (W(x, t) + e^{st}H(x, t))e^{rx-st}$

On obtient donc :

$$C_{bv}(x, t) = \sum_{n=M}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)e^{rx-(s+\frac{D}{R}\lambda_n)t}}{\int_0^l \varphi_n^2(x)dx} \int_{-\infty}^t e^{(s+\frac{D}{R}\lambda_n)\tau} \int_0^l F(x, \tau).\varphi_n(x)dx.d\tau +$$

$$e^{rx}H(x, t) \quad (3.5)$$

Qui est évidemment décroissante pour t [8]

Chapitre 3

Equation de convection-diffusion pour concentration de sortie avec données mathématiques

3.1 La concentration de sortie

Lorsque la concentration d'entrée est arbitraire le problème est sous-déterminé en raison d'une concentration de sortie inconnue.

Nous résolvons ce problème en définissant la concentration de sortie comme une solution à une équation de diffusion similaire qui satisfait à une condition de Dirichlet à l'extrémité gauche de la ligne médiane.

Dans le cas où la concentration de sortie n'est pas empiriquement observée , alors on peut la déterminer [5]

Premièrement, posant :

$$vC_F(x, t) = vC(x, t) - DC_x(x, t) \quad 0 \leq x < \infty \quad t \in \mathbb{R} \quad (4.1)$$

On remarque que :

$$vC_F(l, t) = vC(l, t) - DC_x(l, t)$$

Ce qui implique que :

$$vC_F(l, t) = vC_E$$

Donc $C_F(l, t) = C_E$

Telque $C_F(x, t)$ **est une solution bornée de l'équation :**

$$(2.1) \Leftrightarrow RC_t = DC_{xx} - vC_x - \mu C + \gamma$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

- $vC_F(x, t_0) = vC(x, t_0) - DC_x(x, t_0)$

$$\Rightarrow vC_F(x, t_0) = v\phi(x) - D\phi_x(x) \quad 0 \leq x < \infty \quad (4.2)$$

- $vC_F(0, t) = vC(0, t) - DC_x(0, t)$

$$\Rightarrow C_F(0, t) = g(t) \quad (4.3)$$

Pour transformer l'équation de convection-diffusion sous une forme standard pour une équation de diffusion non homogène, et pour fournir des conditions aux limites homogènes, on introduit un changement de variable :

$$C_F(x, t) = u(x, t)e^{rx-st} + \frac{\gamma}{\mu} \quad (4.4)$$

Alors (2.1) peut être écrite comme suit :

$$u_t(x, t) = \frac{D}{R}u_{xx}(x, t) \quad (4.5)$$

Et les conditions aux limites (4.2), (4.3) deviennent :

- (4.2) $\Leftrightarrow vC_F(x, t_0) = v\phi(x) - D\phi_x(x)$

D'autre part

$$vC_F(x, t_0) = vu(x, t_0)e^{rx-st_0} + v\frac{\gamma}{\mu}$$

Ce qui implique :

$$u(x, t_0) = (C_F(x, t_0) - \frac{\gamma}{\mu})e^{-rx+st_0}$$

Alors :

$$u(x, t_0) = (\phi(x) - \frac{D}{R}\phi_x(x) - \frac{\gamma}{\mu})e^{-rx+st_0}$$

Qui est équivalent à:

$$u(x, t_0) = \Phi(x) \quad (4.6)$$

Telque $\Phi(x) = (\phi(x) - \frac{D}{R}\phi_x(x) - \frac{\gamma}{\mu})e^{-rx+st_0}$

- (4.3) $\Leftrightarrow C_F(0, t) = g(t)$

D'autre part on a :

$$C_F(0, t) = u(0, t)e^{-st} + \frac{\gamma}{\mu} = g(t)$$

Ce qui implique que:

$$u(0, t) = (g(t) - \frac{\gamma}{\mu})e^{st}$$

Alors: $u(0, t) = G(t) \quad (4.7)$

Telque $G(t) = (g(t) - \frac{\gamma}{\mu})e^{st} \quad (4.8)$

Une solution de (4.5) à (4.7) est fournie par :

$$u(x, t) = \int_0^\infty K(x - \zeta, (\frac{D}{R})(t - t_0)) - K(x + \zeta, (\frac{D}{R})(t - t_0)) \Phi(\zeta) d\zeta - \frac{2D}{R} \int_{t_0}^t K_x(x, (\frac{D}{R})(t - \tau)) G(\tau) d\tau \quad (4.9)$$

Où le premier terme est obtenu par une extension de Φ et le dernier terme par la méthode de Duhamel [2].

Telque le noyau et son dérivé sont :

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}, \quad K_x(x, t) = \frac{x}{2t} K(x, t) \quad (4.10)$$

3.2 Une estimation de l'erreur de Danckwarts

Ce problème ne semble pas avoir été résolu dans la littérature et

la représentation résultante devrait être utile pour les problèmes d'intérêt pratique.

Danckwarts a éliminé la concentration de sortie inconnue en supposant une concentration continue à la limite d'écoulement, forçant ainsi des conditions homogènes de Neumann (i.e: la condition de Robin est remplacée par la condition de Neuman) [5]

Premièrement, on définit une nouvelle concentration:

$C_D = C_D(x, t)$ qui satisfait les conditions de (2.1) à (2.3) .

Mais la condition (2.4) sera remplacée par la condition de Neuman

suivante:

$$C_{Dx}(l, t) = 0 \quad t > t_0 \quad (5.1)$$

Alors notre problème devient:

$$RC_{Dt} = DC_{Dxx} - vC_{Dx} - \mu C_D + \gamma \quad (2.1)$$

$$C_D(x, t_0) = \phi(x) \quad 0 < x < l \quad (2.2)$$

$$vC_D(0, t) - DC_{Dx}(0, t) = vg(t) \quad (2.3)$$

$$C_{Dx}(l, t) = 0 \quad t > t_0 \quad (5.1)$$

On voit que la condition (5.1) n'est pas généralement vérifiée:

on prend $C_D = C_D(x) \in C_{Dt} = \gamma = 0$ qui nous donne le problème considéré par Danckwarts.

Maintenant, on note que $C_{Dx}(l) = 0 \Rightarrow C_D(l) = 0$

Le changement de variable: $C_D(x, t) = (W_D(x, t) + e^{st}H_D(x, t))e^{rx-st}$

et les paramètres: $r = \frac{v}{2D}$, $s = \frac{1}{R}(\frac{v^2}{4D} + \mu)$

restent les mêmes, mais l'équation de convection-diffusion (2.7) et la condition

initiale (2.8) doivent respecter la nouvelle définition de $H_D(x, t)$ telque :

$$H_D(x, t) = (1 + \cos \frac{\pi x}{l})g(t) \quad (5.2)$$

qui remplace (2.9) .

Et d'après cette nouvelle définition de $H_D(x, t)$ on trouve que la condition

$$(2.10) : W_{Dx}(0, t) - rW_D(0, t) = 0 \quad \text{reste la même car:}$$

$$(2.3) \Leftrightarrow vC_D(0, t) - DC_{Dx}(0, t) = vg(t)$$

Ce qui implique que:

$$v[(W_D(0, t) + e^{st}H_D(0, t)e^{-st}) - D[e^{-st}W_{Dx}(0, t) + rW_D(0, t)] - D[H_{Dx}(0, t) + rH_D(0, t)] = vg(t)$$

On a :

$$H_D(x, t) = (1 + \cos \frac{\pi x}{l})g(t) \Rightarrow H_D(0, t) = 2g(t)$$

Et on a:

$$H_{Dx}(x, t) = (\frac{-\pi}{l} \sin \frac{\pi x}{l})g(t) \Rightarrow H_{Dx}(0, t) = 0$$

$$H_D(l, t) = H_{Dx}(l, t) = 0$$

Alors on trouve après la substitution:

$$W_{Dx}(0, t) - rW_D(0, t) = 0$$

Mais la condition (2.11) sera remplacée par :

$$W_{Dx}(l, t) + rW_D(l, t) = 0$$

Car on a une condition de Neuman: $C_{Dx}(l, t) = 0$

Donc: $e^{rl-st}[W_{Dx}(l, t) + rW_D(l, t)] + e^{rl}[H_{Dx}(l, t) + rH_D(l, t)] = 0$

Alors: $W_{Dx}(l, t) + rW_D(l, t) = 0$ (5.3)

La séparation des variables de la solution $W_D(x, t) = \varphi_D(x)T_D(t)$ pour le problème

homogène nous mène à un problème de Sturm-Liouville avec des valeurs

propres strictement positives:

$$Z_1 = \tan(l\sqrt{\lambda_D}) \quad , \quad Z_2 = \frac{2r\sqrt{\lambda_D}}{\lambda_D - r^2} \quad (5.4)$$

Informations sur la façon de l'approche de λ_D à leur valeur asymptotique est utile pour évaluer l'estimation d'erreur.

Premierement , on voit que :

$$\frac{n^2\pi^2}{l^2} < \lambda_{D_n} < \frac{(n+1)^2\pi^2}{l^2}$$

Alors pour chaque n , on a $\lambda_n < \lambda_{D_n}$

Donc , λ_{D_n} aura la valeur asymptotique

$$\begin{aligned} \lim_{\sqrt{\lambda_D} \rightarrow \infty} Z_2 &= \lim_{\sqrt{\lambda_D} \rightarrow \infty} \frac{2r\sqrt{\lambda_D}}{\lambda_D - r^2} \\ &= \lim_{\sqrt{\lambda_D} \rightarrow \infty} \frac{r}{\sqrt{\lambda_D}} = 0 \end{aligned}$$

Ce qui implique que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{D_n} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$$

La fonction propre $\varphi_{D_n}(x)$ est définie comme:

$$(3.1) \Leftrightarrow \varphi_n(x) = \cos(x\sqrt{\lambda}) + \frac{r}{\sqrt{\lambda}} \sin(x\sqrt{\lambda}) \quad n = 1, 2, \dots,$$

mais avec leurs valeurs propres données par :

$$(5.4) \Leftrightarrow Z_1 = \tan(l\sqrt{\lambda_D}) \quad , \quad Z_2 = \frac{2r\sqrt{\lambda_D}}{\lambda_D - r^2}$$

Si nous laissons la sommation commencer à $M = 1$, une solution pour $W_D(x, t)$

sera fournie par:

$$(3.3) \Leftrightarrow W(x, t) = \sum \varphi_n(x) \cdot T_n(t)$$

Où $T_{D_n}(t)$ vient de:

$$(3.4) \Leftrightarrow T_n(t) = \frac{e^{-\frac{D}{R}\lambda_n t}}{\int \varphi_n^2(x) dx} \left(\int_{t_0}^t e^{(s+\frac{D}{R}\lambda_n)\tau} \int_0^l F(x, \tau) \cdot \varphi_n(x) dx \cdot d\tau + e^{(s+\frac{D}{R}\lambda_n)t_0} \int_0^l e^{-rx} \phi(x) - \right.$$

$$\left. H(x, t_0) \varphi_n(x) dx \right)$$

Et une solution sera donnée par $C_{D\ bv}(x, t)$ comme:

$$(3.5) \Leftrightarrow C_{bv}(x, t) = \sum_{n=M}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) e^{rx - (s + \frac{D}{R} \lambda_n)t}}{\int_0^l \varphi_n^2(x) dx} \int_{-\infty}^t e^{(s + \frac{D}{R} \lambda_n)\tau} \int_0^l F(x, \tau) \cdot \varphi_n(x) dx \cdot d\tau + e^{rx} H(x, t)$$

Puisque C et C_D différer le plus proche de $x = l$, notre définition de l'erreur

est le choix naturel :

$$E_D(t) = |C(l, t) - C_D(l, t)| \quad (5.7)$$

Si nous permettons que (5.7) est, par hypothèse, décroissante avec t ,

il s'ensuit que:

$$E_D(t) \geq |C_{bv}(L, t) - C_{D bv}(L, t)| \geq \left| \frac{\gamma}{\mu} \right| \quad (5.8)$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'équation de convection- diffusion.

Le problème est formulé dans un domaine fini ou la loi conservation appropriée rempli les conditions de Robin aux extrémités.

Au début, nous avons suggéré que la concentration d'entré est arbitraire, après étude nous sommes parvenues à un problème sous déterminé en raison d'une concentration de sortie inconnue.

Alors, nous avons essayé de résoudre ce problème en définissant la concentration de sortie comme une solution à une équation de diffusion similaire qui satisfait à une condition de Dirichlet à l'extrémité gauche de la ligne médiane.

Comme le problème n'ayant pas été résolu pour cette approche, ce qui nous a conduit à éliminer la concentration de sortie inconnue en supposant une concentration continue à la limite d'écoulement, on a obtenu, enfin de compte, un problème bien posé.

Finalement, nous avons proposé une solution au problème de Neuman en l'utilisant pour produire une estimation.

Bibliographie

- [1] J.R.Cannon, The one-dimensional heat equation,(Edited by Felix E. Browder),Encyclopedia of mathematics and its applications , vol.23, Addison Wesley, Menlo Park, CA (1984).
- [2] P.V. Danckwerts, Continuous flow systems, Chem.Eng.Sci. 2(1), 1-13(1953)
- [3] R.Dresnak and W.E. Dobbins, Numerical analysis of BOD and DO profiles, J. Sanit. Eng. Div, Proc. Am. Soc. Civ. Engrs. 94 (SA5), 789-807 (1968).
- [4] M. Th. van Genuchten and J.C. Parker, Boundary conditions for displacement experiments through short laboratory soil columns, Soil Sci. Soc. Am. J.48, 703-708 (1984).
- [5] Golz, W. J and J.R.Dorroh. 2001. The convection-diffusion equation for a finite domain with time varying boundaries. Applied Mathematics Letters 14 :983-988(received by AMLSeptember 2000 ; accepted by AML October 2000)
- [6] A. Kreft and A. Zuber, On the physical meaning of the dispersion equation and its solutions for different initial and boundary conditions , Chem. Eng. Sci.33, 1471- 1480 (1978).
- [7] S.H. Lai and J.J. Jurinak, Cation adsorption in one-dimensional flow through soils:a numerical solution, Water Resour. Res. 8 (1), 99-107 (1972).
- [8] J.D. Logan and V. Zlotnik, The convection-diffusion equation with periodic boundary conditions, Appl. Math. Lett. 8 (3), 55-61 (1995).
- [9] A.W. Naylor and G.R. Sell, Linear operator theory in engineering and science, (Edited by F. John, J.E.Marsden, L. Sirovich), Applied mathematical sciences, vol. 40, Holt, Rinehart, and Winston , New york (1971), reprint ed., Springer-Verlag, Newyork (1982).
- [10] J.C. Parker and M.Th. van Genuchten , Flux-averaged and volume-

- Averaged concentrations in continuum approaches to solute transport, *Water Resour. Res.* 20 (7), 866-872 (1984).
- [11] Aude Rondepierre & Adeline Rouchon , Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles, Étude théorique, Département STPI ,(2012-2013)
- [12] Z. Svoboda, THE CONVECTIVE-DIFFUSION EQUATION AND ITS USE IN BUILDING PHYSICS, Faculty of Civil Engineering, Czech Technical University, Thakurova 7, 166 29 Prague 6, Czech Republic, *International Journal on Architectural Science*, Volume 1, Number 2, p.68-79,(2000)
- [13] G.P. Tolstov, Fourier series, (Translated by R.A.Silverman), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1962), reprint ed., Dover, New York (1976)
- Dimensional convective-dispersive solute transport equation , U.S. Department of Agriculture, Agricultural Research Service, Technical Bulletin No. 1661, Government Printing office, Washington, D.C. (1982)
- [14] Violaine Roussier-Michon, Séries et Applications, INSA Toulouse, Département STPI, PO ICBE 2.eme année, UV3 de mathématiques (2006-2007).
- [15] A.H. Weerts, Analytical models for chemical transport on the subsurface environment, Wageningen Agricultural University, Department of Water Resources, Wageningen, The Netherlands (1994).

